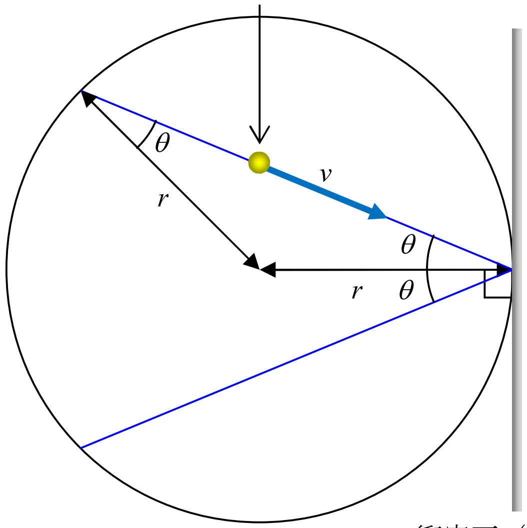
物理問題　I

ア　$2mv\cos\theta$

解説

粒子（質量 m ）



衝突面（接平面）

（球殻との衝突は衝突点における接平面との衝突に置き換えて考える）

　方向についての条件がないので，力積の大きさで解答することにする。

球殻の衝突面に垂直な運動量成分が球殻から力積を受け運動量が変化する。

衝突直前の粒子の運動量の大きさの衝突面に垂直な成分は $mv\cos\theta$

弾性衝突だから，衝突直後の粒子の運動量の大きさの衝突面に垂直な成分も $mv\cos\theta$

衝突直前と直後で運動量の正負が入れ替わるから，

運動量変化の大きさは $mv\cos\theta-(-mv\cos\theta)=2mv\cos\theta$

「粒子が球殻から受ける力積の大きさ＝粒子の運動量変化の大きさ」および

「粒子が球殻から受ける力積の大きさ＝粒子が球殻に与える力積の大きさ」より，

粒子が球殻に与える力積大きさ＝$2mv\cos\theta$

イ　$\dfrac{mv^2}{r}$

解説

単位時間あたりの移動距離が v で，衝突点と次の衝突点の距離が $2r\cos\theta$ だから，

単位時間あたりの衝突回数＝$\dfrac{v}{2r\cos\theta}$　［回/s］

よって，単位時間あたりの力積の総和＝$2mv\cos\theta\times\dfrac{v}{2r\cos\theta}=\dfrac{mv^2}{r}$

$\boxed{\text{ウ}}$ $\dfrac{mv^2}{4\pi r^3}$

解説

誘導に乗れば，$\dfrac{\frac{Nmv^2}{r}}{4\pi r^2} = N \times \dfrac{mv^2}{4\pi r^3}$ であるが，その元となる考え方を以下に示す。

1 個の粒子が単位時間（1 秒間）に球殻に与える力積の総和 $\dfrac{mv^2}{r}$ は

1 回の衝突で粒子が球殻に与える力積と単位時間の衝突回数の積から得たものであるが，

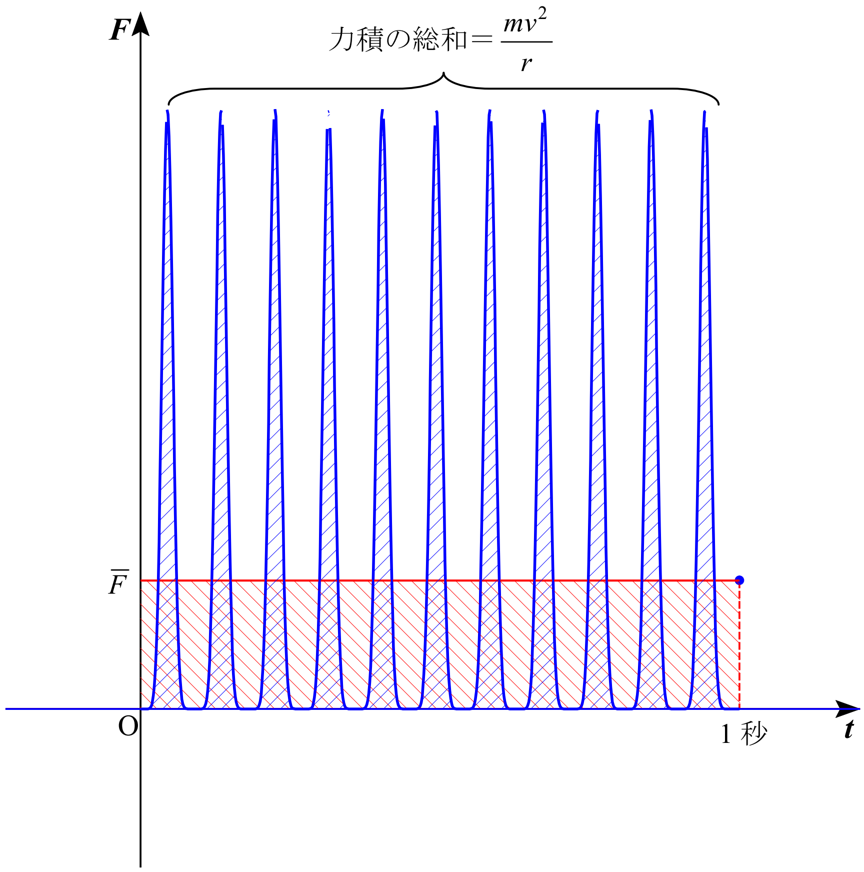
この力積を用いて粒子が球殻に与える力の平均値 $\overline{F}$ を求めると，

球殻に 1 秒間与えた力積は $\overline{F}$ を用いて，$\overline{F} \times 1$ で与えられるから，

$\overline{F} \times 1 = \dfrac{mv^2}{r}$ より，$\overline{F} = \dfrac{mv^2}{r}$ となる。

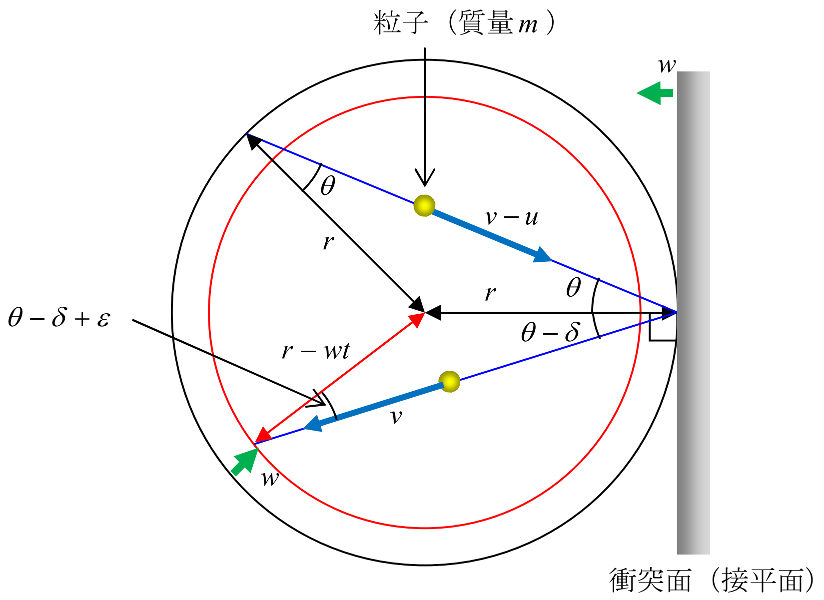
したがって，1 個の粒子は $\overline{F} = \dfrac{mv^2}{r}$ で球殻全体を押し続けていると見なせる。

よって，N 個の粒子が球殻に与える圧力の平均値 $P = \dfrac{N\overline{F}}{4\pi r^2} = N \times \dfrac{mv^2}{4\pi r^3}$



エ w

解説



粒子の速度の衝突面に対する垂直成分が衝突面と弾性衝突することと

$\dfrac{\text{衝突直後の相対速度}}{\text{衝突直前の相対速度}}=-e$ （e は反発係数）において，$e=1$ より，

速さ $(v-u)\cos\theta$ （$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）を正の向きとすると，$\dfrac{-v\cos(\theta-\delta)-(-w)}{(v-u)\cos\theta-(-w)}=-1$

よって，$(v-u)\cos\theta+w=v\cos(\theta-\delta)-w$

補足

反射角が減少するのは，

衝突面に垂直な速さが衝突直後増加し，平行の成分は変化しないからである。

オ $2w\cos\theta$

解説

$(v-u)\cos\theta+w=v\cos(\theta-\delta)-w$ より，$(v-u)\cos\theta+w\approx v\cos\theta+v\delta\sin\theta-w$

$\therefore u\cos\theta\approx 2w-v\delta\sin\theta$ ・・・①

$(v-u)\sin\theta=v\sin(\theta-\delta)$ より，$(v-u)\sin\theta\approx v\sin\theta-v\delta\cos\theta$

$\therefore u\sin\theta\approx v\delta\cos\theta$ ・・・②

①$\times\cos\theta+$②$\times\sin\theta$ より，$u(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\approx 2w\cos\theta$ $\therefore u=2w\cos\theta$

補足

$\sin(\theta-\delta)=\sin\theta\cos\delta-\sin\delta\cos\theta\approx\sin\theta-\delta\cos\theta$

$\cos(\theta-\delta)=\cos\theta\cos\delta+\sin\theta\sin\delta\approx\cos\theta+\delta\sin\theta$

カ $\dfrac{2w\sin\theta}{v}$

解説

$u = 2w\cos\theta$ を①に代入すると，$2w\cos^2\theta \approx 2w - v\delta\sin\theta$ より，

$$\delta \approx \frac{2w\left(1-\cos^2\theta\right)}{v\sin\theta} = \frac{2w\sin\theta}{v}$$

または，

$u = 2w\cos\theta$ を②に代入すると，$2w\cos\theta\sin\theta \approx v\delta\cos\theta$ より，$\delta \approx \dfrac{2w\sin\theta}{v}$

キ $\dfrac{2w\sin(\theta-\delta)}{v-2w\cos(\theta-\delta)}$

解説

$t = \dfrac{r\cos(\theta-\delta+\varepsilon)+r\cos(\theta-\delta)}{v}$ となるところが $t = \dfrac{2r\cos(\theta-\delta)}{v}$ となっていることから，

ε は十分小さいと見なしてよい。

よって，

$$\begin{aligned}
r\sin(\theta-\delta) &= (r-wt)\sin(\theta-\delta+\varepsilon) \\
&= (r-wt)\sin\{(\theta-\delta)+\varepsilon\} \\
&\approx (r-wt)\{\sin(\theta-\delta)+\varepsilon\cos(\theta-\delta)\} \\
&= (r-wt)\sin(\theta-\delta)+\varepsilon(r-wt)\cos(\theta-\delta)
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{wt\sin(\theta-\delta)}{(r-wt)\cos(\theta-\delta)} \\
&= \frac{w\cdot\dfrac{2r\cos(\theta-\delta)}{v}\cdot\sin(\theta-\delta)}{\left(r-w\cdot\dfrac{2r\cos(\theta-\delta)}{v}\right)\cos(\theta-\delta)} \\
&= \frac{\dfrac{2w\sin(\theta-\delta)}{v}}{1-\dfrac{2w\cos(\theta-\delta)}{v}} \\
&= \frac{2w\sin(\theta-\delta)}{v-2w\cos(\theta-\delta)}
\end{aligned}$$

$\boxed{ク}$ $\dfrac{v-2w\cos(\theta-\delta)}{v-2w\cos\theta}$

解説

$u=2w\cos\theta$, $t=\dfrac{2r\cos(\theta-\delta)}{v}$ より,

$$\begin{aligned}\frac{v}{v-u}\times\frac{r-wt}{r}&=\frac{v}{v-2w\cos\theta}\times\frac{r-w\cdot\dfrac{2r\cos(\theta-\delta)}{v}}{r}\\&=\frac{v}{v-2w\cos\theta}\times\frac{v-2w\cos(\theta-\delta)}{v}\\&=\frac{v-2w\cos(\theta-\delta)}{v-2w\cos\theta}\end{aligned}$$

補足

$\dfrac{v}{v-u}\times\dfrac{r-wt}{r}=\dfrac{v-2w\cos(\theta-\delta)}{v-2w\cos\theta}\xrightarrow{\delta\to 0}1$ より,

δ が十分小さいとき, $\dfrac{v}{v-u}=\dfrac{r}{r-wt}$ として問題ない。

よって, $(v-u)r=v(r-wt)$

$(v-u)r=v(r-wt)$ について

r を k 回目の衝突直前の球殻の半径とすると,

$v-u$ は $k-1$ 回目の衝突直後から k 回目の衝突直前までの速さ,

$r-wt$ は $k+1$ 回目の衝突直前の球殻の半径,

v は k 回目の衝突直後から $k+1$ 回目の衝突直前までの速さである。

したがって, $(v-u)r=v(r-wt)$ は

k 回目の衝突直前の速さ×k 回目の衝突直前の球殻半径

＝$k+1$ 回目の衝突直前の速さ×$k+1$ 回目の衝突直前の球殻半径

を意味する。

よって, n 回目の衝突直後から $n+1$ 回目の衝突直前までの速さを V_n,

$n+1$ 回目の衝突直前の球殻の半径を R_{n+1} とすると,

帰納的に, $V_nR_{n+1}=$一定 が成り立つ。

ゆえに, 粒子の速さが球殻の半径に反比例する。

$\boxed{\text{ケ}}$ $-\dfrac{5}{3}$

解説

粒子の速さが半径に反比例するから，$v=\dfrac{A}{r}$（A は比例定数）とすると，

$$\begin{aligned}P&=N\times\frac{mv^2}{4\pi r^3}\\&=N\times\frac{m\left(\dfrac{A}{r}\right)^2}{4\pi r^3}\\&=N\times\frac{A^2m}{4\pi r^5}\end{aligned}$$

ここで，球殻の体積を V とすると，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ より，$r^3=\dfrac{3}{4\pi}V$　$\therefore r^5=\left(\dfrac{3}{4\pi}V\right)^{\frac{5}{3}}$

ゆえに，$P=N\times\dfrac{A^2m}{4\pi}\times\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)^{\frac{5}{3}}\times V^{-\frac{5}{3}}$

可逆的断熱体積変化の微分方程式を解く（ポアソンの式）

可逆的断熱体積変化の微分方程式

$(P,\ V,\ T)$から$(P+dP,\ V+dV,\ T+dT)$に微小変化した場合を考える。

内部エネルギーの微小変化をdU，このとき気体がする微小の仕事をdWとすると，

断熱変化だから，$0 = dU + dW$

内部エネルギーの微小変化dU

$$dU = nC_{\mathrm{v}}(T+dT) - nC_{\mathrm{v}}T$$
$$= nC_{\mathrm{v}}dT$$

微小の仕事dW

$$dW = \frac{1}{2}\{(P+dP)+P\}\{(V+dV)-V\}$$
$$= PdV + \frac{1}{2}dPdV$$

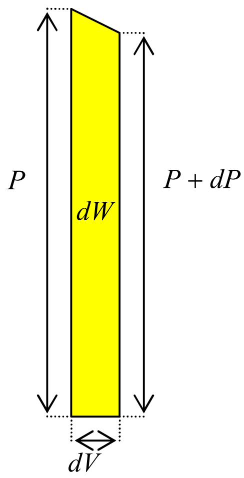
ここで，$dPdV$は無視してよいから，

$dW = PdV$

また，理想気体の状態方程式より，

$$P = \frac{nRT}{V}$$

よって，$dW = \dfrac{nRT}{V}dV$



よって，$0 = dU + dW$は$0 = nC_{\mathrm{v}}dT + \dfrac{nRT}{V}dV$と表せる。

これを整理し$\dfrac{dT}{T} = -\dfrac{R}{C_{\mathrm{v}}}\cdot\dfrac{dV}{V}$　・・・①　とし，これを可逆的断熱体積変化の微分方程式とする。

可逆的断熱体積変化の微分方程式を解く

①の両辺について不定積分を行う。

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\frac{R}{C_v} \cdot \frac{dV}{V}$$

$$\int \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v} \int \frac{dV}{V}$$

$$\log T = -\frac{R}{C_v} \log V + \mathrm{A}$$ （A は積分定数）

$$\log T = \log V^{-\frac{R}{C_v}} + \mathrm{A}$$

$$\log T - \log V^{-\frac{R}{C_v}} = \mathrm{A}$$

$$\log \frac{T}{V^{-\frac{R}{C_v}}} = \mathrm{A}$$

$$\log TV^{\frac{R}{C_v}} = \mathrm{A}$$

A は定数だから，可逆的断熱体積変化の微分方程式の解は　$TV^{\frac{R}{C_v}} =$ 一定　・・・②

または，

$PV = nRT$ より，$T = \frac{PV}{nR}$ だから，これを②に代入すると　$\frac{PV}{nR} \cdot V^{\frac{R}{C_v}} =$ 一定

n は系内部の気体の物質量で一定，R は気体定数だから nR は一定である。

よって，可逆的断熱体積変化の微分方程式の解は　$PV^{1+\frac{R}{C_v}} =$ 一定　・・・③

ポアソンの式

②，③のままでもいいが，$C_p = C_v + R$ より，$\frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} - 1$

ここで，比熱比 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ とおくと，

②は $TV^{\gamma-1} =$ 一定

③は，$PV^{\gamma} =$ 一定

となる。

これを**ポアソンの式**または**ポアソンの法則**という。

ポアソンの式：$TV^{\gamma-1} =$ 一定　または　$PV^{\gamma} =$ 一定　$\left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$

補足

1．比熱比について

理想気体が単原子分子の場合 $\gamma=\dfrac{C_p}{C_v}=\dfrac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R}=\dfrac{5}{3}$

理想気体が二原子分子の場合 $\gamma=\dfrac{C_p}{C_v}=\dfrac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R}=\dfrac{7}{5}$

2．気体分子の運動の自由度を f とすると，$C_v=\dfrac{f}{2}R$

単原子分子は球状分子とするので，
xyz 座標空間の並進運動成分 x,y,z をもつから，自由度 $f=3$

二原子分子は，直線分子とするので，
並進運動成分 x,y,z の自由度 3 と直線の傾きを任意にとるための自由度 2 をもつから，自由度 $f=5$

よって，

単原子分子の $C_v=\dfrac{3}{2}R$

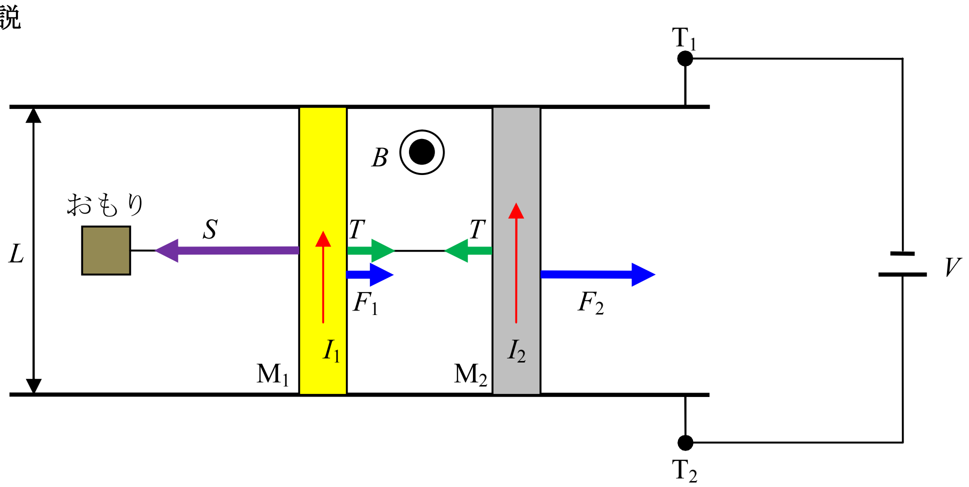
二原子分子の $C_v=\dfrac{5}{2}R$

物理問題 Ⅱ

(1)

イ ② ロ $\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}VBL$ ハ $\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}V$

解説



イ

金属棒は電磁力を受けて動くから，フレミング左手の法則より，上図の接続となる。

ロ・ハ

金属棒 M_1，M_2 に働く電磁力の大きさを F_1, F_2，流れる電流を I_1, I_2 とすると，

$R_1 > R_2$ より，$I_1 < I_2$ だから，$F_1 < F_2$

よって，2 つの金属棒をつなぐ糸に張力 T が発生する。

しかし，金属棒 M_1，M_2 と糸を含めた系を 1 つの系と見なすと，張力は内力となる。

よって，この系にはたらく外力は，右方向に電磁力 F_1, F_2，左方向におもりからの張力 S となり，右方向に働く電磁力の和は，

$$F_1+F_2 = I_1BL + I_2BL$$
$$= (I_1+I_2)BL$$
$$= \frac{V}{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}BL \quad \leftarrow \ R_1 \text{ と } R_2 \text{ の合成抵抗の大きさ}$$
$$= \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}VBL$$

これより，金属棒が動かないようにするために，おもりからかけなければならない力，

すなわち S の大きさは，$\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}VBL$ ・・・ロ

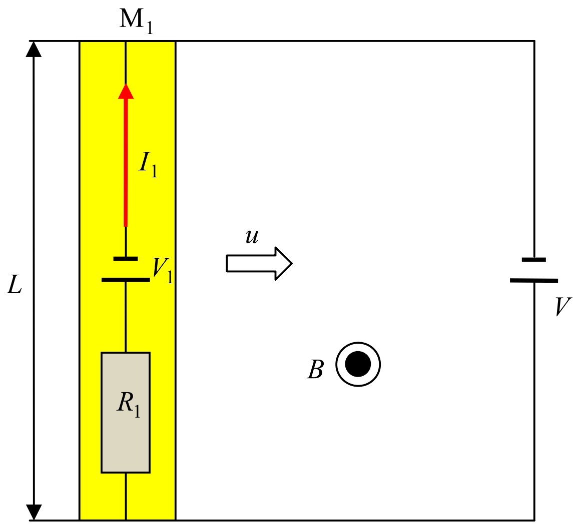
また，直流電源から流れる電流は，$I_1+I_2=\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}V$ ・・・ハ

(2)

$\boxed{\text{ニ}}$ uBL　$\boxed{\text{ホ}}$ $\dfrac{V-uBL}{R_1}$　$\boxed{\text{ヘ}}$ $\dfrac{(V-uBL)BL}{R_1}$

解説

金属棒 M_1 が起電力 V_1 の電池になり，下図のような閉回路ができる。



金属棒 M_1 に発生する起電力の大きさ V_1

誘導起電力の公式を使って解けばよい。

丁寧に解くと，

金属棒 M_1 の電荷が受けるローレンツ力とクーロン力のつり合いから，

$quB = qE \quad \therefore E = vB \quad \therefore V_1 = EL = uBL$　・・・$\boxed{\text{ニ}}$

あるいは，レンツの法則より，$V_1 = \dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{dBS}{dt} = B\dfrac{dS}{dt} = BuL$

金属棒 M_1 を流れる電流の大きさ I_1

キルヒホッフの第 2 法則（起電力の和＝電位降下の和）および

電源の起電力の大きさ ＞ 誘導起電力の大きさ

より，$V - V_1 = R_1 I_1 \quad \therefore I_1 = \dfrac{V-V_1}{R_1}$

これと $V_1 = uBL$ より，$I_1 = \dfrac{V-uBL}{R_1}$　・・・$\boxed{\text{ホ}}$

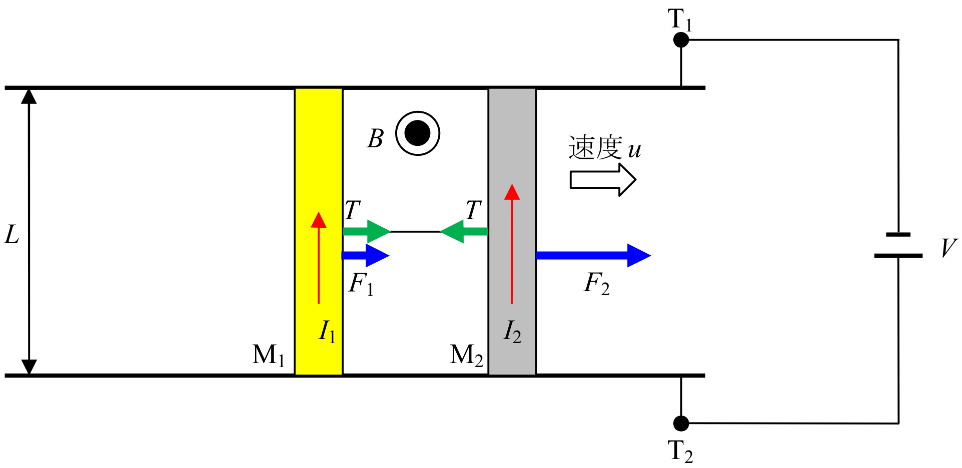
金属棒 M_1 に働く電磁力の大きさ F_1

電磁力とあるが，これを電磁力の大きさとすると，

$I_1 = \dfrac{V-uBL}{R_1}$ より，$F_1 = I_1 BL = \dfrac{(V-uBL)BL}{R_1}$　・・・$\boxed{\text{ヘ}}$

$\boxed{\text{ト}}$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)(V-uBL)BL$ $\boxed{\text{チ}}$ $\frac{V}{BL}$ $\boxed{\text{リ}}$ 0

解説



糸の張力の大きさ

2 つの金属棒は，金属棒どうしをつなぐ糸の張力に束縛されて動くから，

2 つの金属棒の加速度は等しく，それを a とすると，

それぞれの金属棒の運動方程式は $ma = F_1 + T$， $ma = F_2 - T$

よって， $F_1 + T = F_2 - T$ より， $T = \frac{1}{2}(F_2 - F_1)$

これと $\boxed{\text{ヘ}}$ より $F_1 = \frac{(V-uBL)BL}{R_1}$， 同様にして， $F_2 = \frac{(V-uBL)BL}{R_2}$

ゆえに， $T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)(V-uBL)BL$ ・・・ $\boxed{\text{ト}}$

金属棒の終速度

金属棒は右向きに加速度運動し，その速度が大きくなっていくともに，

金属棒に生じる誘導起電力も大きくなっていくから，

回路全体の起電力の大きさ $V - uBL$ は無限に 0 に近づいていく。

よって，金属棒の速さは無限に $\frac{V}{BL}$ ・・・ $\boxed{\text{チ}}$ に近づいていく。

また，回路全体の起電力の大きさが無限に 0 に近づいていくことは，

回路を流れる電流の大きさも無限に 0 ・・・ $\boxed{\text{リ}}$ に近づいていくこと意味し，

それはさらに，金属棒に働く電磁力の大きさが無限に 0 に近づいていき，

その結果，金属棒の加速度が無限に 0 に近づいていくことを意味する。

(3)

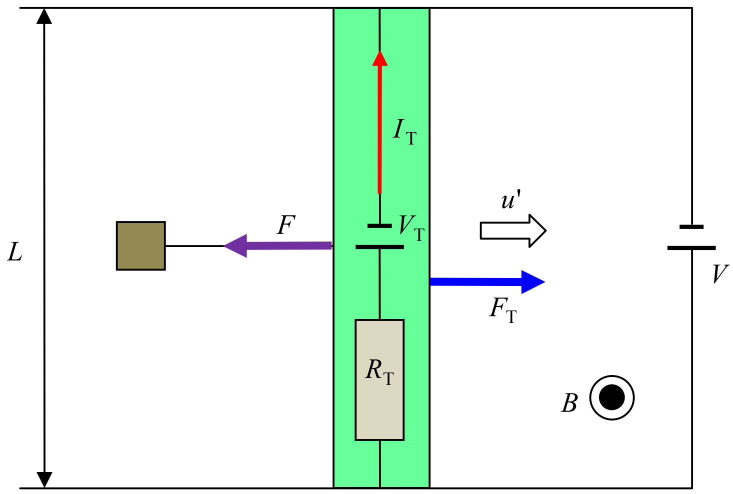
ヌ $\dfrac{1}{BL}\left\{V-\dfrac{R_1R_2F}{(R_1+R_2)BL}\right\}$ ル $\dfrac{F}{BL}\left\{V-\dfrac{R_1R_2F}{(R_1+R_2)BL}\right\}$ ヲ $\dfrac{R_1R_2F^2}{(R_1+R_2)B^2L^2}$

ワ $\dfrac{FV}{BL}$ カ $P_V=P_F+P_J$

解説

金属棒 M_1，M_2 と糸を含めた系を 1 つの系と見なすと，張力は外力でなくなるから，

この系で，つまり抵抗 $\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ の金属棒で考えることにする。



一定の速さになったときの速さ

$F=F_T$， $F_T=I_TBL$ より， $I_T=\dfrac{F}{BL}$

これと $I_T=\dfrac{V-V_T}{R_T}=\dfrac{V-u'BL}{R_T}$ より， $\dfrac{V-u'BL}{R_T}=\dfrac{F}{BL}$ $\quad\therefore u'=\dfrac{1}{BL}\left(V-\dfrac{R_TF}{BL}\right)$

$R_T=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ より， $u'=\dfrac{1}{BL}\left\{V-\dfrac{R_1R_2F}{(R_1+R_2)BL}\right\}$ ・・・ヌ

速さが一定になったとき外力 F に逆らって電磁力がする単位時間当たりの仕事 P_F

電磁力の向きと金属棒の運動の向きのなす角が 0 であることと $F=F_T$ より，

$P_F=Fu'\cos 0=\dfrac{F}{BL}\left\{V-\dfrac{R_1R_2F}{(R_1+R_2)BL}\right\}$ ・・・ル

単位時間当たりに発生するジュール熱 $\boldsymbol{P_J}$

$F_\mathrm{T} = I_\mathrm{T} BL$，$F = F_\mathrm{T}$ より，$I_\mathrm{T} = \dfrac{F}{BL}$

よって，

$$P_J = {I_\mathrm{T}}^2 R_\mathrm{T}$$
$$= \left(\frac{F}{BL}\right)^2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
$$= \frac{R_1 R_2 F^2}{(R_1 + R_2) B^2 L^2} \quad \cdots \boxed{\text{ヲ}}$$

電池が単位時間当たりする仕事 $\boldsymbol{P_V}$

上の解説より，$I_\mathrm{T} = \dfrac{F}{BL}$

よって，$P_V = I_\mathrm{T} V = \dfrac{FV}{BL} \quad \cdots \boxed{\text{ワ}}$

ゆえに，$P_V = P_F + P_J \quad \cdots \boxed{\text{カ}}$

補足

$F = F_\mathrm{T}$ を利用しないと，式処理が煩雑になる。

物理問題　Ⅲ

(1)

$\boxed{\text{あ}}$ $\dfrac{\rho_0 R T_0}{w}$

解説

ことわり

空気を理想気体とみなし，空気 1mol について理想気体の状態方程式を適用する。

解法例 1

求める圧力を P_0，地表における空気 1mol の体積を V_0 とすると，

理想気体の状態方程式より，$P_0 V_0 = RT_0 \quad \therefore P_0 = \dfrac{RT_0}{V_0}$

ここで，空気 1mol の体積 V_0 について

空気 1mol の質量 $w[\mathrm{kg/mol}]$，空気の密度 $\rho_0[\mathrm{kg/L}]$ より，

空気 1mol の体積 $V_0 = w[\mathrm{kg/mol}] \times \dfrac{1}{\rho_0}[\mathrm{L/kg}] = \dfrac{w}{\rho_0}[\mathrm{L/mol}]$

よって，$P_0 = \dfrac{RT_0}{\dfrac{w}{\rho_0}} = \dfrac{\rho_0 R T_0}{w}$

解法例 2

理想気体の状態方程式を変換する。

理想気体の分子量を M，質量を W とすると，$n = \dfrac{W}{M}$ より，$PV = \dfrac{W}{M}RT \quad \therefore P = \dfrac{W}{V}\dfrac{RT}{M}$

$\dfrac{W}{V}$ は理想気体の密度を表すから，これを ρ とすると，$P = \dfrac{\rho RT}{M}$

問題の場合，$M = w, \rho = \rho_0, T = T_0$ だから，$\dfrac{\rho_0 R T_0}{w}$

重要公式

理想気体のモル質量を M とすると，$PM = \rho RT$

気球問題など気体の密度を扱う問題で重宝

$\boxed{い}$ $\dfrac{\rho_0 R T_0}{w}\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

解説

ある理想気体について，状態方程式より，V は $\dfrac{T}{P}$ に比例するから，

$$PV^{\gamma}=一定 \Leftrightarrow P\cdot\left(\frac{T}{P}\right)^{\gamma}=一定$$

$$\Leftrightarrow P^{1-\gamma}T^{\gamma}=一定$$

$$\Leftrightarrow PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=一定$$

ここで，ある高度における大気の圧力 P をとすると，

地表における大気の圧力と温度はそれぞれ $\dfrac{\rho_0 R T_0}{w}$，T_0

ある高度における大気の温度は T だから，

$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=$ 一定より，

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=\frac{\rho_0 R T_0}{w}T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad \therefore P=\frac{\rho_0 R T_0}{w}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$\boxed{う}$ $\rho_0\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

解説

$\boxed{い}$ より，$Pw=\rho_0 R T_0\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$　・・・①

また，求める密度を ρ とすると，$Pw=\rho RT$　・・・②

①，②より，$\rho RT=\rho_0 R T_0\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\therefore \rho=\rho_0\frac{T_0}{T}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$=\rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(2)

え　$\dfrac{T_1}{T_1 - T_0}\cdot\dfrac{M}{\rho_0}$

解説

気球が浮かび始めたときの気球の空気の体積をV_1，密度をρ_1とすると，

気球全体に働く重力＝$(\rho_1 V_1 + M)g$

空気が入っていない気球の体積＝0 より，このときの気球の体積はV_1

したがって，気球に働く浮力＝$\rho_0 V_1 g$

よって，浮力と重力とのつり合いより，$\rho_0 V_1 g = (\rho_1 V_1 + M)g$

$$\therefore V_1 = \frac{M}{\rho_0 - \rho_1} \quad ・・・③$$

気球の下部は開いているから，気球内の空気の圧力は地表の圧力P_0と等しい。

したがって，

地表の大気について，$P_0 w = \rho_0 R T_0$

気球内の空気について，$P_0 w = \rho_1 R T_1$

より，

$$\rho_1 R T_1 = \rho_0 R T_0 \quad \therefore \rho_1 = \frac{T_0}{T_1}\rho_0 \quad ・・・④$$

④を③に代入することにより，

$$V_1 = \frac{M}{\rho_0 - \dfrac{T_0}{T_1}\rho_0}$$

$$= \frac{T_1}{T_1 - T_0}\cdot\frac{M}{\rho_0}$$

お　$\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}$

解説

求める物質量をnとすると，気球内の空気の状態方程式は，$P_0 V = nRT_1 \quad \therefore n = \dfrac{P_0 V}{RT_1}$

これと$P_0 = \dfrac{\rho_0 R T_0}{w}$より，

$$n = \frac{\rho_0 R T_0}{w}\cdot\frac{V}{RT_1}$$

$$= \frac{\rho_0 V T_0}{w T_1}$$

$\boxed{\text{か}}$ $\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}(C_{\mathrm{V}}+R)(T_1-T_0)$　$\boxed{\text{き}}$ $\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}C_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)$

解説

$n=\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}$ mol，温度 T_0 の空気を地表で温度 T_1，体積 V にした後，気球に入れたから，

加えられた熱＝n mol の空気の内部エネルギー変化＋n mol の空気が地表の大気にした仕事

$$=\frac{\rho_0 V T_0}{w T_1}C_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)+P_0\Delta V$$
$$=\frac{\rho_0 V T_0}{w T_1}C_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)+\frac{\rho_0 V T_0}{w T_1}R(T_1-T_0)$$
$$=\frac{\rho_0 V T_0}{w T_1}(C_{\mathrm{V}}+R)(T_1-T_0)\quad\cdots\boxed{\text{か}}$$

また，内部エネルギーの増加＝$\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}C_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)$　・・・$\boxed{\text{き}}$

別解

定圧変化だから，加えた熱$=\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}C_{\mathrm{P}}(T_1-T_0)=\dfrac{\rho_0 V T_0}{w T_1}(C_{\mathrm{V}}+R)(T_1-T_0)$　・・・$\boxed{\text{か}}$

(3)

$\boxed{\text{く}}$ $T_0\left(\dfrac{T_0}{T_1}+\dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma-1}$

解説

・気球の下部が閉じられたので気球内の空気の質量は変化しない。

・「気球の体積 V が変化しない」とある。

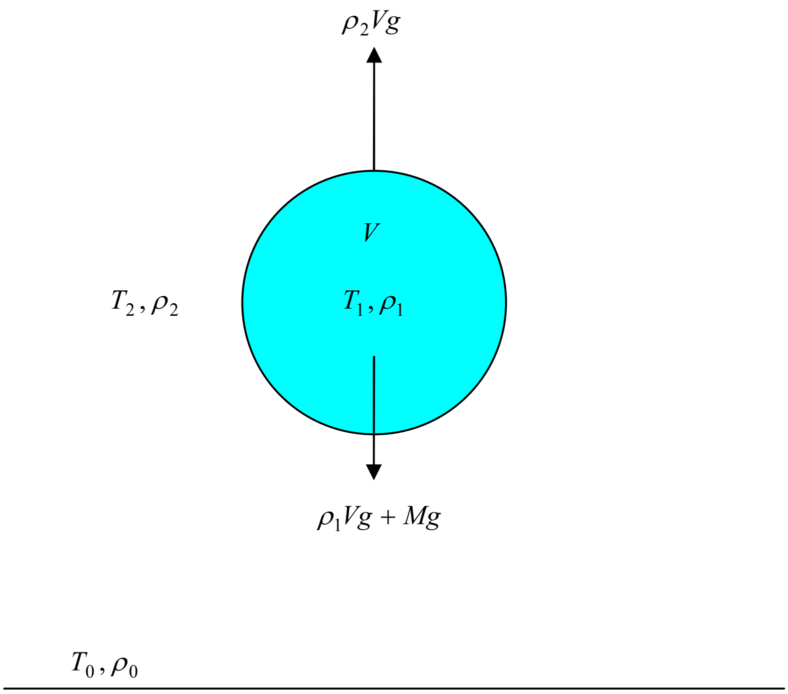
したがって，気球内の空気の密度は⑤式 $\rho_1=\dfrac{T_0}{T_1}\rho_0$ のままである。

よって，静止した高度の大気の空気密度を ρ_2 とすると，浮力と重力のつり合いより，

$\rho_2 Vg=\dfrac{T_0}{T_1}\rho_0 Vg+Mg$　$\therefore \rho_2=\dfrac{T_0}{T_1}\rho_0+\dfrac{M}{V}$　・・・⑤

また，静止した高度の大気の温度を T_2 とすると，$\boxed{\text{う}}$より，$\rho_2=\rho_0\left(\dfrac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$　・・・⑥

⑤，⑥より，$\rho_0\left(\dfrac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\dfrac{T_0}{T_1}\rho_0+\dfrac{M}{V}$　$\therefore T_2=T_0\left(\dfrac{T_0}{T_1}+\dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma-1}$



$\boxed{け}$ $T_1\left(\dfrac{T_0}{T_1}+\dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma}$

解説 1

力のつり合いは気球の下部を閉じ静止している場合と同じだから，
気球内の気体の密度は ρ_1 である。
また，気球内の圧力は大気圧と等しい。そこで，大気圧を P_2 とすると， $P_2 w=\rho_1 RT_3$

これと $P_0 w=\rho_0 RT_0$ より， $\dfrac{P_2}{P_0}=\dfrac{\rho_1}{\rho_0}\cdot\dfrac{T_3}{T_0}$ $\therefore T_3=\dfrac{P_2}{P_0}\cdot\dfrac{\rho_0}{\rho_1}\cdot T_0$

ここで，$\boxed{い}$より， $P_2=P_0\left(\dfrac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$， $\boxed{え}$の解説④より， $\dfrac{\rho_0}{\rho_1}=\dfrac{T_1}{T_0}$ だから，

$$T_3=\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\cdot\frac{T_1}{T_0}\cdot T_0$$

$$=\left\{\frac{T_0\left(\dfrac{T_0}{T_1}+\dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma-1}}{T_0}\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} T_1$$

$$=T_1\left(\frac{T_0}{T_1}+\frac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma}$$

解説 2

力のつり合いは気球の下部を閉じ静止している場合と同じだから，

気球内の気体の密度は ρ_1 であり，$\boxed{え}$の解説④より，$\rho_1 = \dfrac{T_0}{T_1}\rho_0$ ・・・⑦

気球内の空気の圧力と大気圧が等しいから，大気圧を P_2 とすると，

気球外部と内部について，それぞれ $P_2 w = \rho_2 R T_2$，$P_2 w = \rho_1 R T_3$ が成り立つから，

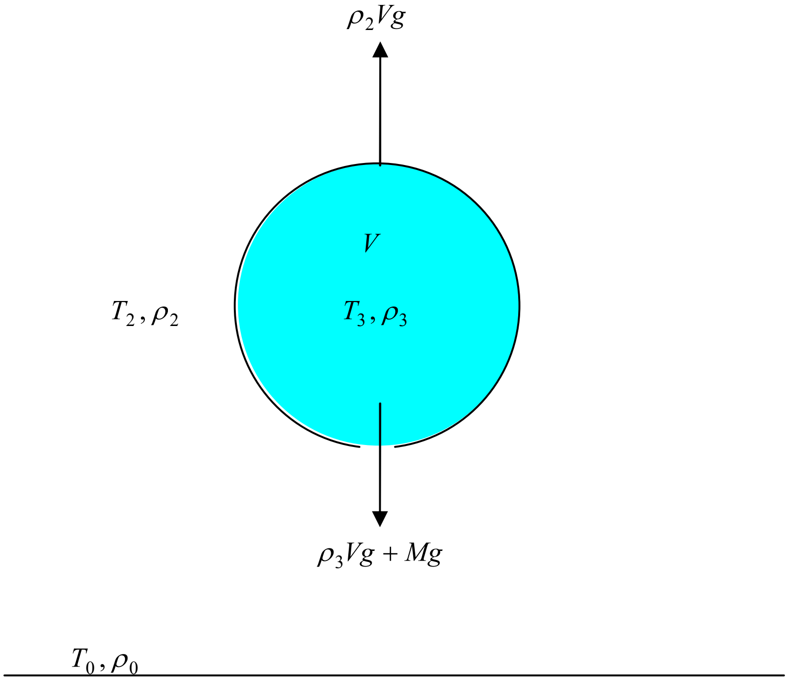
$\rho_1 = \dfrac{T_2}{T_3}\rho_2$ ・・・⑧

⑦，⑧より，$\dfrac{T_0}{T_1}\rho_0 = \dfrac{T_2}{T_3}\rho_2 \quad \therefore T_3 = \dfrac{T_1}{T_0\rho_0}T_2\rho_2$

ここで，⑥より，$\rho_2 = \rho_0\left(\dfrac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ だから，

$$
\begin{aligned}
T_3 &= \frac{T_1}{T_0\rho_0}T_2\rho_2 \\
&= \frac{T_1}{T_0\rho_0}T_2\rho_0\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
&= T_1\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}
\end{aligned}
$$

これに $T_2 = T_0\left(\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma-1}$ を代入することにより，$T_3 = T_1\left(\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma}$



$\boxed{\text{こ}}$ ②

解説

$T_3 = T_1\left(\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma}$ より，$\dfrac{T_3}{T_1} = \left(\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma}$

$\gamma > 1$ だから，$\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V}$ が 1 より大きければ $T_3 > T_1$，小さければ $T_3 < T_1$ である。

$\boxed{\text{え}}$ $V_1 = \dfrac{T_1}{T_1 - T_0} \cdot \dfrac{M}{\rho_0}$ および $V_1 < V$ より，$\dfrac{T_1}{T_1 - T_0} \cdot \dfrac{M}{\rho_0} < V$ $\quad \therefore \dfrac{M}{\rho_0 V} < \dfrac{T_1 - T_0}{T_1}$

これより，$\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V} < 1$

よって，$\dfrac{T_3}{T_1} = \left(\dfrac{T_0}{T_1} + \dfrac{M}{\rho_0 V}\right)^{\gamma} < 1$

ゆえに，気球内の空気の温度は T_1 より低い。